# 629. 領域ノ移動ニヨル Dirichlet ノ問題ノ解ノ変化ニツイテ(續)

井上　正雄（阪大）

本誌第136号603ニヨイテ Dirichlet ノ問題ノ解（generalised）ヲ領域ノ一種ノ汎函數ト考ヘテ連續タルタメノ收斂領域ノ滿足スベキ一條件トシテ次ノモノヲ與ヘタ。

(C): $\Omega$（有界領域）ノ regular ナ境界点 $p$ ニヨイテ充分先ノ $\Omega_n$ ノ境界 $\Sigma_n$ 上ニ夫々境界点 $p_n$ ヲ次ノ如ク撰ブコトが出來ル。

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p$$

且ツ $\prod_{n\geqq N} E_{\Omega_n, p_n}$ が原点ヲ端点トスルーツノ線分ヲ含ム，

コヽニ $E_{\Omega_n, p_n}$ ハ $\Omega_n$ ノ $p_n$ ヲ原点トスル projection デアル。

ソシテ " $\lim_{n\to\infty}\Omega_n = \Omega$ ナル regular domain[1] ノ系列 $\{\Omega_n\}$ が條件 (C) ヲ滿足シテオレバ，$\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ヲ有ス " コトヲ証明シタ。

性質 W ヲ有スルトハ $\Omega_n$ ニ關スル Dirichlet ノ問題ノ解が $\Omega$ ニ關スル Dirichlet ノ問題ノ解（generalised）

---

1) 前号デハ normal domain ト云ッタ。

ニ収斂スル性質デアル。

ソシテ又次ノコトモ述ベテオイタ。

"$\Omega$ ヲ有限次連結領域トスルトキ，$\lim_{n\to\infty}\Omega_n=\Omega$ 且ツ $\Omega_n$ ノ連結度ガ有界ナラバ，$\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ヲ有ス。"

シカシナガラ之レニハ証明ヲ與ヘナカッタ。コヽニコノ証明ヲ述ベルコトニシヤウ。ソノタメ $\lim_{n\to\infty}\Omega_n=\Omega$ ノ定義ヲ次ノ如ク修正シテ述ベテ置ク。

点々ノ適當ナ一ツノ近傍ヲ画ケバコレガ充分先ノスベテノ領域ニ含マレルトキ，カヽル点ノ集合ヲソノ領域系ノ核ト呼ビ，$\{\Omega_n\}$ ノ如何ナル部分系列モ常ニ核トシテ $\Omega$ ヲ持チ、且ツ $\Omega$ ノ外点ハ充分先ノスベテノ $\Omega_n$ ノ外部ニ含マレルトキ[2] $\lim_{n\to\infty}\Omega_n=\Omega$ トスル。

サテ上述ノ定理ノ証明ノタメニ先ヅ $\{\Omega_n\}$ ノ任意ノ部分系列 $\{\Omega_{n'}\}$ カラ，$\Omega$ ノ *regular* ナ境界点 $p$ ニツイテ條件(C)ヲ満足スルヤウナ部分系列 $\{\Omega_{n''}\}$ ガ常ニ撰ベルコトヲ証明スル。

$\Omega$ ハ有界ナ有限次連結領域デアルカラ，ソノ *regular* ナ境界点 $p$ ハ一ツノ *Kontinuum* ニ含マレテイル筈デアル。ヨッテ $\rho(E_{\Omega,p})\geqq\delta$ ナル正数 $\delta$ ガ存在スル，コヽニ $\rho(E_{\Omega,p})$ ハ $E_{\Omega,p}$ ノウチ原点ヲ端点トスル線分ノ長サヲ示スモノトス。

---

2) コノ補正ハコノ議論デハ直接ニハ必要デハナイノデアル。

コノトキ，充分大ナル $n'$ ニ對シテ

$$\rho(E_{\Omega_{n'}}, p_{n'}) \geqq \frac{\delta}{4}$$

ナル $\Omega_{n'}$ ノ regular ナ境界点ノ系列 $\{p_{n'}\}$ ヲ若シ $\lim_{n'\to\infty} p_{n'} = p$ ナル如ク撰ブコトガ出來レバコレガ求ムルモノトナル。ヨツテカク撰ブコトガ出來ナイモノト假定シマウ。シカラバ次ノ如キ $\frac{\delta}{2}$ ヨリ小ナル正数 $\delta_1$ 及ビ部分系列 $\{\Omega_{n''}\}$ ガ存在シナケレバナラヌ。

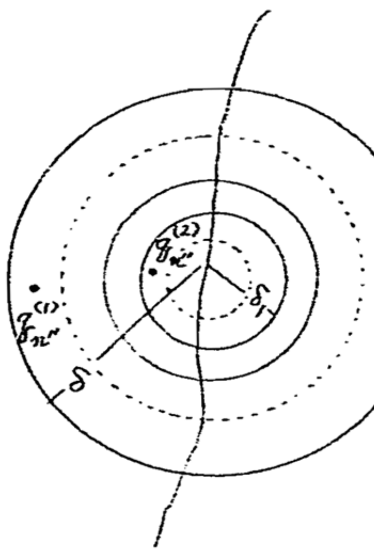
$\Omega_{n''}$ ノ $\rho(E_{\Omega_{n''}}, p_{n''}) \geqq \frac{\delta}{4}$ ナルスベテノ $p_{n''}$ 及ビスベテノ $n''$ ニ對シテ

$$|p_{n''} - p| > \delta_1$$

一方ニヲイテ，充分大ナル $n''$ ニ對シテ，$\Omega_{n''}$ ハ

$$|q^{(1)}_{n''} - p| \geqq \frac{3\delta}{4}$$

ナル少ナクトモ一ツノ境界点 $q^{(1)}_{n''}$ 及ビ $\frac{3\delta_1}{4} \leqq |q^{(2)}_{n''} - p| \leqq \delta_1$ ナルゴトキ少ナクトモ一ツノ境界点 $q^{(2)}_{n''}$ ヲ持タネバナラヌ。(*) シカモコノ $q^{(1)}_{n''}$ 及ビ $q^{(2)}_{n''}$ ハ一ツノ Kontinuum デハ結バレ得ナイ筈デアル。




コノ方法ヲ再ビ円 $|z-p| \leqq \delta_1$ 及ビ系列 $\{\Omega_{n''}\}$ ニ繰リ返ス。即 $\rho(E_{\Omega_{n''}}, p_{n''}) \geqq \frac{\delta_1}{4}$ ナル $\Omega_{n''}$ ノ regular ナ境界点 $p_{n''}$ ノ系列ヲ $\lim_{n''\to\infty} p_{n''} = p$ ナル如ク撰ブ

コトガ出來レバ，コレガ求メルモノトナルカラコノコトヲ否定スレバ更ニ又 $\frac{\delta_1}{2}$ ヨリ小ナル正数 $\delta_2$ 及部分系列 $\{\Omega_{n'''}\}$ ヲ撰ンデ $\Omega_{n'''}$ ノ $\rho(E_{\Omega_{n'''}}, p_{n'''}) \geqq \frac{\delta_1}{4}$ ナルスベテノ $p_{n'''}$ 及ビスベテノ $n'''$ ニ對シテ $|p_{n'''}-p|>\delta_2$ ナル如クスルコトガ出來ル。

ソノトキ充分先ノ $n'''$ ニ對シテ，$\Omega_{n'''}$ ハ $|q^{(2)}_{n'''}-p| \geqq \frac{3}{4}\delta_1$ ナル少クトモ一ツノ境界点 $q^{(2)}_{n'''}$ 及ビ

$$\frac{3}{4}\delta_2 \leqq |q^{(3)}_{n'''}-p| \leqq \delta_2$$

ナル如キ少クトモ一ツノ境界点 $q^{(3)}_{n'''}$ ヲ持タネバナラヌ。(※) シカモコヽニ $q^{(2)}_{n'''}$ ト $q^{(3)}_{n'''}$ トハ一ツノ Kontinuum デハ結バレテハイナイ筈デアル。従ッテ $q^{(1)}_{n'''}$，$q^{(2)}_{n'''}$，$q^{(3)}_{n'''}$ ヲ含ム $\Omega_{n'''}$ ノ境界点集合ハ *separate* シテイルワケデアル。

モシ最初ノ主張ヲ否定スレバコノコトハ無限回繰リ返サルベキデアル。シカルニコノコトハ明ラカニ $\{\Omega_n\}$ ノ連結度ガ有界ナル假定ニ矛盾スルコトヽナル。ヨッテ $p$ ニツイテ條件(C)ヲ満足スル部分系列ノ常ニ撰ベルコトガ解ッタ。

コレサヘ云ヘレバ後ハ容易デアル。即チ任意ノ部分系列 $\{\Omega_{n'}\}$ ニ對シテ作ッタ $U(z, \mathcal{F}, \Omega_{n'})$ ハ一様ニ有界ナ調和函数ノ系列デアルカラ，コレカラ適當ニ部分系列（コノ系列ヲ矢張リ $\{\Omega_{n'}\}$ デ表ハシテオカウ）ヲ撰ンデ $\Omega$ 内デノ有界ナ調和函数 $U(z)$ ニ一様ニ（廣義ノ）収斂サスコトガ出來ル。

最初ノ $\{\Omega_{n'}\}$ ガ任意デアルカラ証明ノタメニハ

$$\mathfrak{U}(z)=\mathfrak{U}(z,\mathfrak{F},\Omega)$$

ナルコトヲサヘ証明スレバ充分デアル。

若シ $\mathfrak{U}(z)\neq\mathfrak{U}(z,\mathfrak{F},\Omega)$ トスレバ

$\underline{\lim}_{z\to p}\mathfrak{U}(z)$ 或 $\overline{\lim}_{z\to p}\mathfrak{U}(z)$ ノドレカガ $\mathfrak{F}(p)=f(p)$ ト一致シナイヤウナ $\Omega$ ノ regular ナ境界点 $p$ ガ存在シナケレバナラヌ。シカルニ一方 $p$ ニヨイテハ $\{\Omega_{n'}\}$ ノ部分系列 $\{\Omega_{n''}\}$ ヲ撰ンデ條件 (C) ヲ満足サスコトガ出来ルノデアルカラ従ツテ $\{\Omega_{n''}\}$ デ定義サレル函数即チ $\mathfrak{U}(z)$ ハ $\lim_{z\to p}\mathfrak{U}(z)=f(p)$ トナラナケレバナラヌ。コレハ明ラカニ矛盾デアル。

ヨツテ

$$\mathfrak{U}(z)\equiv\mathfrak{U}(z,\mathfrak{F},\Omega)。$$

即チ $\lim_{n\to\infty}\mathfrak{U}(z,\mathfrak{F},\Omega_n)=\mathfrak{U}(z,\mathfrak{F},\Omega)$

ナルコトガ証明サレタ。（証明了）

以上ノ証明デモ分ル通リ $\lim_{n\to\infty}\Omega_n=\Omega$ ノ定義ニヨイテ「如何ナル部分系列モ核トシテ $\Omega$ ヲ持ツ」トシタコトノ意味ガ了解サレルモノト思フ。特ニ(※)ナルトコロニソノ必要ヲ感ズルワケデアル。コレヲ「$\{\Omega_n\}$ ガ核トシテ $\Omega$ ヲ持ツ」トシテハ駄目デアルコトハ勿論デアル。例ヘバ一ツノ線分ノ cut ノ入ッタヤウナ領域ニ対シコノ線分ニ孤立境界点ニヨツテ領域ヲ收斂サセタ場合ヲ考ヘレバ直チニ解ルコトデアル。

猶、コノ機會ニ一言辯明シタイコトがアル。ソレハ137号609ニヲイテ，談話603ノ結果ヲ使ヒ，93号419ニヲイテ作ッタ regular ナ境界点ノ一例ヲ Raynor ノ條件ニアテハマラナイヤウニ modify シタノデアルが，コレハ又 Wiener ノ條件ニ當嵌ルコトが解ッタ。Wiener ノ判定條件ハ点集合ノ capacity ニモヨルモノデアルが平面ノ場合ハ又ソノ超越直徑ニモ等シイ筈デアル。ソコデ609ニオケル境界 $\Sigma_n^*$ ノ Capacity ヲコノ両端ヲ通ル直線ノ Capacity 即テ超越直徑デ下カラ Abschätzung ヲヤリ之レニテ判定條件ニアテハマレバヨイコトが解ッタ。ソコデコノコトが出來ナイヤウニスルタメニ $\Sigma_n^*$ ニ充分少サク cut ヲ入レテオケバヨイコトが解ル。cut ハ原点ニヲケル $H(z)$, $H^*(z)$ ノ値が $n$ トトモニ $0$ ニナルヤウニ入レレバヨイワケデ．コノコトノ出來ルコトハ603ニヲケル最後ノ結果即チコノ談話ニヲケル結果ヲ使ヘバヨイ。

コノ例ニヲイテ $\Sigma_n^*$ ノ一端ノ argment ヲ $n$ トトモニ増サズニアル一定ノ角ニトメテオイテモ結果ハ同ジデアル——シカシコノコトノタメニハ Raynor ノ判定條件ヲ一度使ハネバナラヌ。

兎角，コノヤウナコトハ極クツマラナイ話デアリ、コンナコトデ度々紙上ヲウヅメテイルコトヲ御詫ビイタシマス。

又141号609ニヲケル Raynor ノ判定條件中

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m(\Omega\cdot C_n)}{r_n}=0$$

トアルノハ，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m(\Omega\cdot C_n)}{\gamma_n}\neq 1$$

ノ mis. print デス。